Université François Rabelais
Département de Physique

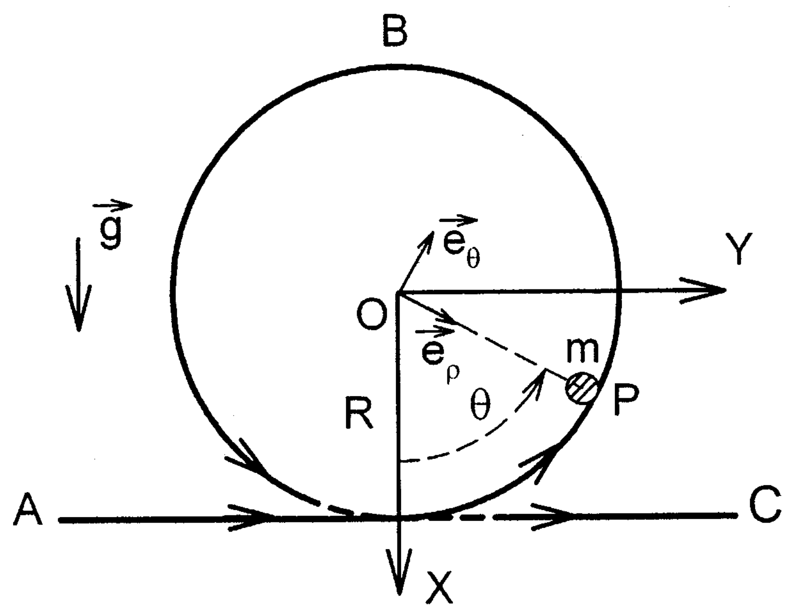
Année 2009/2010
L2 SM

Mécanique

Mercredi 5 janvier 2010 — Durée 2h

Exercice 1

Une petite boule de masse m venant de A avec la vitesse $\vec{v}_0$ glisse sans frottement sur une piste circulaire verticale de rayon R (voir figure).



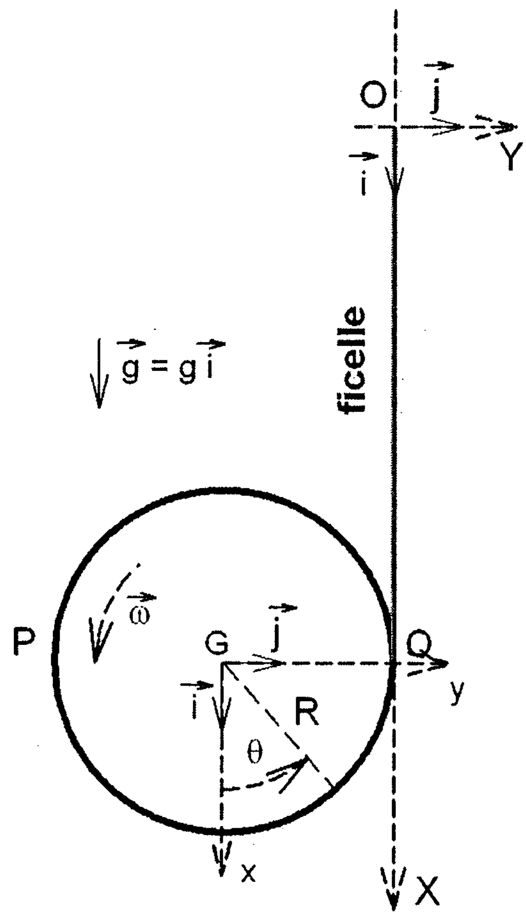
1. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ de la boule au point P en fonction de θ, R, $||\vec{g}||$ et $||\vec{v}_0||$. On posera $||\vec{g}|| = g$ et $||\vec{v}_0|| = v_0$.

2. Soit $\vec{N} = N\vec{e}_\rho$ la force de réaction de la piste sur la boule.
   - Exprimer N en fonction de m, θ, R, g et v_0.
   - Faire un graphe de $-N(\theta)/(mg)$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ lorsque $v_0 \geq \sqrt{5Rg}$.
   - A quelle condition y a-t-il contact de m avec la piste? Déduire qu'il existe une valeur minimale v_{0_C} de v_0 pour que m puisse atteindre B en suivant la piste. Donner l'expression de v_{0_C}.

3. On considère le cas $v_0 = \sqrt{4Rg}$. Montrer que la masse m tombe de la piste à partir d'un point dont on déterminera la position angulaire θ. Quel type de trajectoire suit alors m. Faire un schéma de la trajectoire. Déterminer la hauteur maximale h atteinte par m en fonction de R.

Exercice 2

On considère un bobine cylindrique de rayon R et de masse m sur laquelle est enroulée une ficelle inextensible et sans masse. On fixe l'extrémité libre de la ficelle en O et on laisse tomber la bobine avec une vitesse initiale nulle suivant la direction de l'axe vertical OX. Comme le ferait un yo-yo, la bobine tombe en se déroulant avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,(\vec{i} \wedge \vec{j})$ où $\omega = d\theta/dt$ (voir figure).



Partie A

On choisit un point référence de la bobine que l'on repère par l'angle polaire $\theta(t)$ du sytème d'axes Gxy lié au référentiel barycentrique $\Re_G$ de la bobine (voir figure). À l'instant $t = 0$, la position de la bobine est telle que $\theta(0) = 0$.

1. On note $X(t) - X(0)$ la distance parcourue par le centre de masse G de la bobine dans le référentiel d'observation $\Re$ (supposé galiléen), et on considére que la bobine se déroule sans glissement.
   - Déterminer la relation entre $X(t) - X(0)$ et $\theta(t)$.
   - On note $\vec{v}(G/\Re)$ la vitesse de G dans $\Re$. Déduire de la question précédente l'expression de $\vec{v}(G/\Re)$ en fonction de R, ω et $\vec{i}$.
2. On considère à un instant t les points P et Q de la bobine comme l'indique la figure.
   - Déterminer la vitesse de P et celle de Q dans le référentiel barycentrique. On notera respectivement ces vitesses $\vec{v}(P/\Re_G)$ et $\vec{v}(Q/\Re_G)$ et on les exprimera en fonction de $\vec{v}(G/\Re)$.
   - En utilisant la loi de composition des vitesses d'un même point dans les référentiels $\Re$ et $\Re_G$, déduire la vitesse de P et celle de Q dans $\Re$ que l'on notera respectivement $\vec{v}(P/\Re)$ et $\vec{v}(Q/\Re)$.

Partie B

On s'intéresse dans cette partie au mouvement de la bobine dans le référentiel $\Re$, que l'on suppose galiléen. On rappelle que le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe de révolution est $I = \frac{1}{2}mR^2$. On notera $\vec{T} = T\,\vec{i}$ la tension de la ficelle sur la bobine, et $\vec{a}(G/\Re) = a\,\vec{i}$ l'accélération de G dans $\Re$.

1. Écrire l'équation du mouvement de translation de la bobine.
2. Écrire l'équation du mouvement de rotation de la bobine.
3. En déduire T en fonction de m et g.
4. En déduire, d'autre part, a en fonction de m et g.
5. Déterminer le temps τ nécessaire pour que la ficelle se déroule d'une longueur L. On exprimera τ en fonction de L et g.

Partie C

On s'intéresse dans cette partie aux aspects énergétiques liés au mouvement de la bobine. On notera $E_p(0) = -mgX(0)$ l'énergie potentielle de la bobine à $t = 0$.

1. Exprimer l'énergie cinétique E_c de la bobine en fonction du temps et des paramètres m et g.
2. Exprimer l'énergie potentielle E_p de la bobine en fonction du temps et des paramètres m, g et $E_p(0)$.
3. Exprimer l'énergie mécanique E_m de la bobine en fonction du temps. Est-elle conservée au cours du mouvement?